اختبار شهادة البكالوريا التجريبي في مادة: الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية　　يوم الإثنين 16 ماي 2022　　المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

1) النهاية التالية $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$ تساوي:

أ) $+\infty$　　ب) 0　　ج) -1

2) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 1 + ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$ هي:

أ) متتالية حسابية متناقصة　　ب) متتالية هندسية متزايدة　　ج) متتالية حسابية متزايدة.

3) الجدول التالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية:

x_i	-2	-1	α	3
P_i	$0,12$	$0,5$	β	$0,3$

الأمل الرياضياتي لقانون الاحتمال هو $\mu = 0,32$ من أجل:

أ) $\alpha = 1$ و $\beta = 0,08$　　ب) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,08$　　ج) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,03$

4) إذا كان z عددا مركبا حيث $z = \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ فإن:

أ) $z^{2022} = 1$　　ب) $z^{2022} = -1$　　ج) $z^{2022} = i$

التمرين الثاني:(4,5 نقاط)

صندوق يحوي 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس, منها كريتان تحملان الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 0, وخمسة تحمل الرقم 2 .

1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق ونعتبر الحدثين A و B حيث:

A "الكريات المسحوبة تحمل أرقاما مختلفة "　،　B "الكريات المسحوبة تحمل أرقاما جداؤها معدوم"

ا) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمال الحدثين A و B على الترتيب.

ب) بين أن: $P(A\cap B) = \frac{7}{10}$ ، هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل.

ج) علما أن جداء ارقام الكرات معدوم ماهو احتمال ان تكون مختلفة.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الأرقام المتساويةالمحصل عليها.

ا) عين قيم المتغير العشوائي X.

ب) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X، ثم احسب تباينه $V(X)$.

التمرين الثالث:(4,5 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $3u_{n+1} = 2u_n - 4$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) اوجد قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$، و احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = \frac{5}{v_n + 5} - 5$

أ) بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) بين أن المتتاليتين (w_n) و (u_n) متجاورتان.

ج) احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = \frac{1}{w_0+5} + \frac{1}{w_1+5} + ... + \frac{1}{w_n+5}$

التمرين الرابع:(07نقاط)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - x^2e^x$, (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

1) أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثم احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ماذا تستنتج؟

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

2) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1

4) نعرف على $\mathbb{R}$ الدالة h كما يلي: $h(x) = e^{-1} + xe^x$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج انها موجبة على $\mathbb{R}$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x؛ $f(x) - (1 + e^{-1}x) = -xh(x)$.

ج) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T).

5) أنشئ المماس (T) و المنحني (C_f).

6) أنشيء في نفس المعلم السابق المنحنى (C_g) الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - x^2e^{-x}$.

7) الدالة K معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $K(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^x$ حيث: a ؛ b و c أعداد حقيقية.

أ) عين الأعداد الحقيقية a،b و c حتى تكون الدالة K أصلية للدالة : $x \mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتها:
$x = -2$؛ $y = 1$ ؛ $x = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

فيما يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

1) المعادلة $log^3(x) - 2log^2(x) - 3log(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول في $\mathbb{R}$.

2) f دالة فردية مستمرة على المجال $[-a;a]$: التكامل $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ يساوي 0.

3) A و B حدثان مستقلان معرفان على نفس المجموعة Ω حيث: $P(A) = 0,2$ و $P(A \cup B) = 0,7$، إحتمال الحدث B يساوي: $0,5$

4) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$، مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left|\left(1 - i\sqrt{3}z\right)\right| = 4$ هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = 1$.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع قريصات بيضاء تحمل كل واحدة الرقم 3 و أربع قريصات سوداء تحمل كل واحدة الرقم2 . القريصات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس.

1) نسحب عشوائيا من الكيس ثلاثة قريصات على التوالي دون إرجاع القريصة المسحوبة.

أ) احسب احتمال الأحداث التالية:

A : " القريصات المسحوبة بيضاء " ، B : " القريصات المسحوبة تحمل نفس الرقم ".

C : " ضمن القريصات المسحوبة واحدة على الأكثر سوداء ".

ب) هل الحدثان B و C مستقلان؟ علل

2) نعتبر في هذا الجزء أن عدد القريصات السوداء هو n (حيث: $n \geq 2$)، و نسحب من الكيس عشوائيا و في آن واحد قريصتين.

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع الرقمين الظاهرين على القريصتين.

أ)عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثم احسب بدلالة n الأمل الرياضياتي له.

ب) استنتج عدد القريصات السوداء التي يجب وضعها في الصندوق حتى يكون $E(X) = 5$.

التمرين الثالث(05 نقاط):

I (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n - 1 \\ U_0 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

1) ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \leq -\dfrac{3}{2}$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n).

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$

II (V_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $V_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $V_{n+1} = V_n + U_n + \frac{3}{2}$

1) بين أن المتتالية (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

2) ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $V_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$، ثم استنتج أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$ln\left(\frac{2}{3}V_0 + 1\right) + ln\left(\frac{2}{3}V_1 + 1\right) + ... + ln\left(\frac{2}{3}V_n + 1\right) = ln\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

التمرين الرابع (07 نقاط)

I نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2\, ln\,|x-1| - 2 & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

1) احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ا) ادرس قابلية إشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1: $f'(x) = (x-1)\,(1 + 2ln\,|x-1|)$.

ج) ادرس إتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) ا) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$، يطلب تعيين حصرا للعدد β.

4) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1.

5) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f) على المجال $[-2;4]$.

II 1) باستعمال التكامل بالتجزئة، أوجد الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto (x-1)^2\, ln\,(x-1)$ على المجال $]1;+\infty[$ والتي تنعدم عند 2.

2) $A(\alpha)$ مساحةالحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتها: $y = -2$، $x = \alpha$ و $x = 2$.

- بين أن: $A(\alpha) = \frac{1}{9}\left(-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha - 4\right) u.a$

دورة: ماي 2022	تصحيح نموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي	مديرية التربية لولاية غرداية
المدة: 3 ساعات ونصف	مادة الرياضيات	الشعبة: علوم تجريبية

الموضوع الأول

(العلامة)

التمرين الأول: **04**

1) الاقتراح الصحيح هو: ج — **0,25**

لأن: بوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد: $\lim_{x\to+\infty} x(1-e^{\frac{1}{x}})=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{X}\left(1-e^{X}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{X}}{X}=\lim_{x\to0^+}-\frac{e^{X}-1}{X}=-1$ — **0,75**

2) الاقتراح الصحيح هو: أ — **0,25**

لأن: $u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ و منه المتتالية حسابية و بما أن $\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$ فإنها متناقصة تماما. — **0,75**

3) الاقتراح الصحيح هو: ب — **0,25**

لأن: $\beta=1-(0,12+0,5+0,3)=0,08$ ؛ $0,08\alpha=0,32-(-0,24-0,5+0,9)=0,16$ منه: $\alpha=2$ — **0,75**

4) الاقتراح الصحيح هو: ب — **0,25**

لأن: $z=\frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{1+2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{5}=\frac{5i}{5}=i$

منه: $z^{2022}=(i)^{2022}=(i^2)^{1011}=(-1)^{1011}=-1$. — **0,75**

التمرين الثاني: **4,25**

1) أ) حساب احتمال الحادثتين A و B:

الحادثة $\overline{A}$ "الكريات تحمل نفس الرقم" ؛ الحادثة $\overline{B}$ "لا توجد كرية تحمل الرقم 0".

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}=1-\frac{1+10}{120}=\frac{109}{120}$ ؛ $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=1-\frac{35}{120}=\frac{85}{120}=\frac{17}{24}$. — **2 * 0,5**

ب) تبيين أن $P(A\cap B)=\frac{7}{10}$: $P(A\cap B)=\frac{C_3^1\times C_7^2+C_3^2\times C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{63+21}{120}=\frac{84}{120}=\frac{7}{10}$. — **0,5**

بما أن: $P(A)\times P(B)=\frac{1853}{2880}$ و $P(A\cap B)=\frac{2016}{2880}$ منه: $P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$ فإن الحادثتين B و A غير مستقلتين. — **0,5**

ج) حساب احتمال أن تكون أرقام الكريات مختلفة علما أن جداءها معدوم: $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{7}{10}\times\frac{24}{17}=\frac{84}{85}$. — **0,5**

2) أ) تعيين القيم الممكنة لـ X: الكريات إما تحمل نفس الرقم فإن $X=3$ و تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى فإن $X=0$

أو كريتان تحملان نفس الرقم و الأخرى تحمل رقما مختلفا فإن $X=2$، إذن: مجموعة القيم الممكنة لـ X هي $\{0;2;3\}$. — **0,25**

ب) تعريف قانون الاحتمال: — **0,75**

$P(X=3)=P(\overline{A})=\frac{11}{120}$

$P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_7^1+C_2^2\times C_8^1+C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{79}{120}$

$P(X=0)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}$

$x_i=$	0	2	3	Σ
$P(X=x_i)=$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{11}{120}$	1
$x_i.P_i=$	0	$\frac{158}{120}$	$\frac{33}{120}$	$\frac{191}{120}$
$x_i^2.P_i=$	0	$\frac{316}{120}$	$\frac{99}{120}$	$\frac{415}{120}$

*) حساب التباين $Var(X)$: $E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i.p_i=\frac{191}{120}\approx1,59$ منه: $Var(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2.p_i-[E(X)]^2=\frac{13319}{14400}\approx0,925$. — **0,75**

التمرين الثالث: **04,5**

1) حساب قيمة α: $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+\alpha=\frac{2}{3}v_n-\frac{2}{3}\alpha-\frac{4}{3}+\alpha=\frac{2}{3}v_n+\frac{\alpha-4}{3}$ — **0,5**

تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ إذا و فقط إذا كان: $\frac{\alpha-4}{3}=0$ أي: $\alpha=4$. حدها الأول $v_0=u_0+\alpha=1+4=5$. — **0,25**

2) تبيين عبارة الحد العام لـ (u_n):

0,5 (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ حدها الأول 5 إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه: $u_n = v_n - \alpha = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$.

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

0,5 $u_{n+1} - u_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right) < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

0,25 حساب نهاية المتتالية (u_n): $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right) = -4$ (لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$)

4) حساب المجموع S_n:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = v_0 + v_1 \ldots + v_n - (4 + 4 + \ldots + 4)$$

0,5
$$S_n = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} - 4(n+1) = 15\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1) = 11 - 4n - 15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

5) أ) لنبين أن (w_n) متزايدة تماما:

0,75
$$w_{n+1} - w_n = \frac{5}{v_{n+1} + 5} - \frac{5}{v_n + 5} = \frac{5v_n + 25 - 5v_{n+1} - 25}{(v_{n+1} + 5)(v_n + 5)} = \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)}{(v_{n+1} + 5)(v_n + 5)}$$

بما أن: $v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$ و $5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ فإن: $0 < w_{n+1} - w_n$ و منه المتتالية (w_n) متزايدة تماما.

ب) لنبين أن (u_n) و (w_n) متجاورتان:

لدينا : المتتالية (u_n) متناقصة تماما و المتتالية (w_n) متزايدة تماما

0,5 كما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{v_n + 5} - 5\right) = 1 - 5 = -4$ (لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$) منه: $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n - u_n) = (-4 + 4) = 0$.

و بالتالي فإن المتتاليتين (u_n) و (w_n) متجاورتان.

ج) حساب المجموع T_n:

$$T_n = \frac{1}{w_0 + 5} + \frac{1}{w_1 + 5} + \ldots + \frac{1}{w_n + 5} = \frac{v_0 + 5}{5} + \frac{v_1 + 5}{5} + \ldots + \frac{v_n + 5}{5}$$

0,75
$$T_n = \frac{1}{5}(v_0 + v_1 + \ldots + v_n) + 1 + 1 + \ldots + 1 = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + (n+1) = 4 + n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

07,25 **التمرين الرابع:**

1) أ) حساب النهايتين:

3* 0,25 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$) ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$) لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = 1$ عند $-\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f و إنشاء جدول التغيرات:

4* 0,25

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x) = -2xe^x - x^2e^x$

$f'(x) = e^x(-x^2 - 2x)$

إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $(-x^2 - 2x)$ لأن $e^x > 0$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$1-4e^{-2}$	↗	1	↘	$-\infty$

منه: الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-2]$ و $[0;+\infty[$ ؛ متزايدة تماما على $[-2;0]$.

ج) تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$:

0,25 *من أجل $x \in]-\infty;0[$ فإن: $f(x) \geq 1 - 4e^{-2} > 0$ إذن المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلا على $]-\infty;0[$.

0,25 *f مستمرة و متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ وبما أن: $f(0,7) \approx 0,01 > 0$ و $f(0,8) \approx -0,42 < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

2) تبيين أن المنحني (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :

0,25 — f' تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f''(x)=e^x(-x^2-2x)+(-2x-2)e^x=e^x(-x^2-4x-2)$

0,25 — إشارة $f''(x)$ مثل إشارة $(-x^2-4x-2)$ لأن $e^x>0$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

0,25 — $f''(x)$ انعدمت مرتين مغيرة إشارتها إذن لـ (C_f) نقطتا انعطاف، إحداثياهما : $(-0,6;0,8)$ و $(-3,4;0,6)$ (النتائج مدورة)

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1:

0,5 — $(T):\ y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي: $(T):\ y=e^{-1}(x+1)+1-e^{-1}$ منه: $(T): y=e^{-1}x+1$

4) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h:

h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $h'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

3*0,25 — إشارة $h'(x)$ مثل إشارة $(1+x)$ لأن $e^x>0$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

و بالتالي h متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ و متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$.

0,25 — * و منه الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى $h(-1)=e^{-1}-e^{-1}=0$ ؛ وبالتالي $h(x)\geq 0$ على $\mathbb{R}$.

ب) التحقق من المساواة: من أجل كل عدد حقيقي x ،

0,25 — $f(x)-(1+e^{-1}x)=1-x^2e^x-1-e^{-1}x$

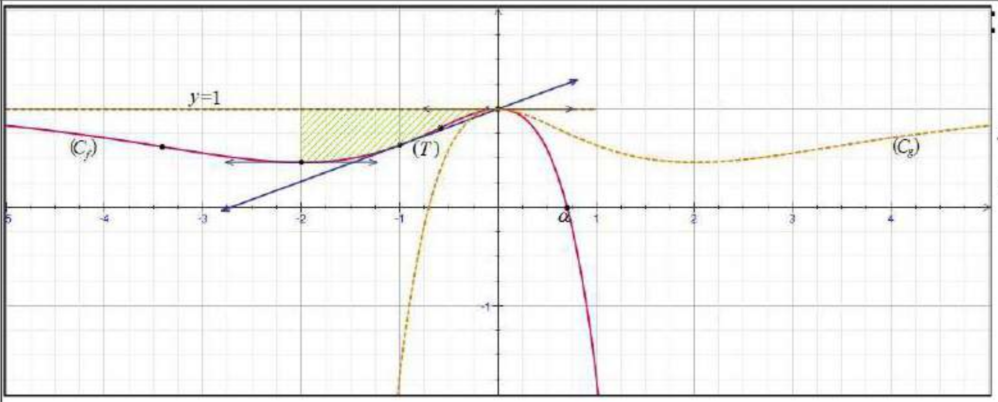
$=-x(xe^x+e^{-1})=-xh(x)$

0,5 — ج) استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ(T):

الوضع النسبي من إشارة $f(x)-(1+e^{-1}x)=-xh(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$+$	0	$+$		$+$	
$xh(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (T)	تماس (C_f) و (T)	(C_f) فوق (T)	تقاطع (C_f) و (T)	(C_f) أسفل (T)	

0,75 — 5) إنشاء (C_f) و المماس (T):



0,25 — 6) إنشاء المنحني (C_g):

لدينا: $g(x)=1-x^2e^{-x}$

يعني: $g(x)=1-(-x)^2e^{-x}$

أي: $g(x)=f(-x)$

منه (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

7) أ) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

K تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $K'(x)=(2ax+b)e^x+e^x(ax^2+bx+c)=e^x(ax^2+(2a+b)x+b+c)$

0,5 — الدالة K أصلية للدالة $x\mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$ يعني: $K'(x)=x^2e^x$ بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\2a+b=0\\b+c=0\end{cases}$ يعني: $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$.

إذن الدالة K حيث $K(x)=e^x(x^2-2x+2)$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

2*0,25 — ب) حساب المساحة: $S=\int_{-2}^{0}|f(x)-1|dx=\int_{-2}^{0}x^2e^xdx=\left[e^x(x^2-2x+2)\right]_{-2}^{0}=2-10e^{-2}(u.a)$

انتهى حل الموضوع الأول

دورة: ماي 2022	تصحيح نموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي	مديرية التربية لولاية غرداية
المدة: 3 ساعات ونصف	مادة الرياضيات	الشعبة: علوم تجريبية

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04)

0,25

1) المعادلة: $\log^3(x)-2\log^2(x)-3\log(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول: ----------> **صحيح**

0,75

التبرير: $\log^3(x)-2\log^2(x)-3\log(x)=0$ تكافئ: $\begin{cases}\log^3(x)-2\log^2(x)-3\log(x)=0\\ \log(x)=X\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}X(X^2-2X-3)=0\\ \log(x)=X\end{cases}$

تكافئ: $\log(x)=0$ أو $\log(x)=-1$ أو $\log(x)=3$ تكافئ: $x=1$ أو $x=10^{-1}$ أو $x=10^3$.

0,25

2) التكامل: إذا كانت الدالة f مستمرة و فردية على $[-a;a]$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ ------------> **صحيح**

0,75

التبرير: f مستمرة على $[-a;a]$ إذن تقبل عليه دالة أصلية F و كذلك: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx...(1)$

و بما أن f فردية فإن: $f(x)=-f(-x)$ بالتعويض في (1) نجد: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}-f(-x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$

إذن: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=[F(-x)]_{-a}^{0}+[F(x)]_{0}^{a}=F(0)-F(a)+F(a)-F(0)=0$.

0,25

3) احتمال الحادثة B يساوي 0,5 ----------> **خطأ**

0,75

التبرير: نعلم أن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

وبما أن A و B مستقلتان فإن: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

أي أن: $0,7=0,2+P(B)(1-0,2)$ منه: $P(B)=\frac{0,5}{0,8}=0,625$.

0,25

4) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|(1-i\sqrt{3})z|=4$ هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=1$ ----------> **خطأ**

0,75

التبرير: $|(1-i\sqrt{3})z|=4$ تكافئ: $|(1-i\sqrt{3})|.|z|=4$ تكافئ: $\sqrt{1+3}.|z|=4$ تكافئ: $|z|=2$ تكافئ: $OM=2$

وبالتالي: مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=2$.

التمرين الثاني: (04)

1) حساب احتمال الحوادث A ، B و C:

3 * 0,5

أ) $P(A)=\frac{A_4^3}{A_8^3}=\frac{24}{336}=\frac{1}{14}$ ؛ $P(B)=\frac{A_4^3+A_4^3}{A_8^3}=\frac{2\times 24}{336}=\frac{1}{7}$ ؛ $P(C)=\frac{A_4^3+6\times C_4^1\times C_4^2}{A_8^3}=\frac{24+144}{336}=\frac{1}{2}$.

0,75

ب) $P(B\cap C)=\frac{A_4^3}{A_8^3}=\frac{24}{336}=\frac{1}{14}$ ، بما أن $P(B)\times P(C)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{14}=P(B\cap C)$ فإن الحادثتين B و C مستقلتان.

0,25

2) أ) تعريف قانون الاحتمال: مجموعة القيم الممكنة لـ X هي: $\{4;5;6\}$.

0,75

$P(X=4)=\frac{C_n^2}{C_{n+4}^2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{2!(n+2)!}{(n+4)!}=\frac{n\times(n-1)}{(n+3)(n+4)}=\frac{n^2-n}{n^2+7n+12}$ ؛ $P(X=5)=\frac{C_n^1\times C_4^1}{C_{4+n}^2}=\frac{8n}{n^2+7n+12}$

$P(X=6)=\frac{C_4^2}{C_{4+n}^2}=\frac{12}{n^2+7n+12}$

$x_i=$	4	5	6	Σ
$P_i=$	$\frac{n^2-n}{n^2+7n+12}$	$\frac{8n}{n^2+7n+12}$	$\frac{12}{n^2+7n+12}$	1

0,25

*) حساب الأمل الرياضياتي:

$E(X)=\frac{4(n^2-n)+5\times 8n+6\times 12}{n^2+7n+12}=\frac{4n^2+36n+72}{n^2+7n+12}$.

0,5

ب) استنتاج عدد القريصات السوداء حيث $E(X)=5$: تكافئ: $\frac{4n^2+36n+72}{n^2+7n+12}=5$

تكافئ $4n^2+36n+72=5n^2+35n+60$ تكافئ $n^2-n-12=0$ تكافئ $n=4$ أو $n=-3$ (مرفوض).

05	التمرين الثالث :
0,5	I. 1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le -\frac{3}{2}$ * لدينا: $u_0 = -\frac{5}{2}$ و $-\frac{5}{2} \le -\frac{3}{2}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$. * نفرض أنه من أجل عدد طبيعي كيفي n : $u_n \le -\frac{3}{2}$ و لنثبت أن: $u_{n+1} \le -\frac{3}{2}$ لدينا من الفرضية $u_n \le -\frac{3}{2}$ ومنه: $\frac{1}{3}u_n - 1 \le \frac{1}{3}(-\frac{3}{2}) - 1$ أي: $u_{n+1} \le -\frac{3}{2}$ إذن الخاصية محققة نحو أجل $n+1$. * الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le -\frac{3}{2}$.
0,5	ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n): $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - 1 - u_n = \frac{-2u_n - 3}{3}$ و بما أن: $u_n \le -\frac{3}{2}$ فإن: $\frac{-2u_n - 3}{3} \ge 0$ إذن: المتتالية (u_n) متزايدة.
0,25	* استنتاج التقارب: (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ $-\frac{3}{2}$ (لأن: $u_n \le -\frac{3}{2}$) إذن هي متقاربة نحو $l \le -\frac{3}{2}$. ج) حساب النهاية:
0,25	$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ (لأن (u_n) متقاربة) و لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$ منه: $l = \frac{1}{3}l - 1$ أي: $\frac{2}{3}l = -1$ و بالتالي: $l = -\frac{3}{2}$.
0,75	2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$ * لدينا: $u_0 = -\frac{5}{2}$ و $-\left(\frac{1}{3}\right)^0 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$. * نفرض أنه من أجل عدد طبيعي كيفي n : $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$ و لنثبت أن: $u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}$ لدينا من الفرضية: $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$ منه: $\frac{1}{3}u_n - 1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2} - 1$ أي: $u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}$. * الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$.
0,5	II. 1) إثبات أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_{n+1} = v_n + u_n + \frac{3}{2}$ يعني: $v_{n+1} - v_n = u_n + \frac{3}{2} = -\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$ منه (v_n) متناقصة تماما.
0,75	2) أ) الإثبات بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$ * من الخاصية نجد: $v_1 = -1$ و نعلم أن: $v_1 = v_0 + u_0 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=1$. * نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ كيفي: $v_n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$ لنثبت أن: $v_{n+1} = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n)$ لدينا من الفرضية $v_n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$ ونعلم أن: $v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (من الجواب السابق) منه: $v_{n+1} = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}) - \left(\frac{1}{3}\right)^n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n)$. الخاصية محققة من أجل $n+1$ * الخلاصة: من أجل من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = -(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$.

ب) استنتاج عبارة v_n بدلالة n:

من أجل كل $n \in IN^*$: $v_n = -(1+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2+...+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}) = -\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n)$ — 0,5

(مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$)

و بما أن: $-\frac{3}{2}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^0) = 0 = v_0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = -\frac{3}{2}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n)$.

ج) حساب النهاية: $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{3}{2}$ (لأن $-1<\frac{1}{3}<1$ منه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$). — 0,25

*) استنتاج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان:

المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة وبما أن $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان. — 0,25

3) تبيين أنه من أجل كل $n \in IN$: $\ln(\frac{2}{3}v_0+1)+\ln(\frac{2}{3}v_1+1)...+\ln(\frac{2}{3}v_n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\ln(3)$

من أجل كل $n \in IN$: $\frac{2}{3}v_n+1 = -(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n)+1 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ومنه: $\ln(\frac{2}{3}v_n+1) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n = n\ln\left(\frac{1}{3}\right)$. — 0,5

إذن: $\ln(\frac{2}{3}v_0+1)+\ln(\frac{2}{3}v_1+1)...+\ln(\frac{2}{3}v_n+1) = 0\times\ln\left(\frac{1}{3}\right)+1\times\ln\left(\frac{1}{3}\right)+...+n\times\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$= (0+1+...+n)\times\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\ln(3)$

التمرين الرابع: — 07

I. 1) حساب النهايتين:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}(X^2\ln(X)-2) = +\infty$ (بوضع $|x-1| = X$ و لأن $\lim_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty$) ؛ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. — 3* 0,25

2) أ) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 1: الدالة f معرفة عند 1 و بجواره:

$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2\ln|x-1|}{x-1} = \lim_{X\to0^+} X\ln X = 0$ و $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{X\to0^+} -X\ln X = 0$. — 0,5

إذن: الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 حيث: $f'(1) = 0$.

بيانيا: نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه 0 (أي مماسا أفقيا). — 0,25

ب) تبيين عبارة المشتقة من أجل كل $x \neq 1$:

f تقبل الاشتقاق على $]-\infty;1[$ و: $f'(x) = 2(x-1)\ln(-(x-1))+\frac{-1}{-(x-1)}(x-1)^2 = (x-1)(1+2\ln(-(x-1)))$

f تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ و: $f'(x) = 2(x-1)\ln(x-1)+\frac{1}{(x-1)}(x-1)^2 = (x-1)(1+2\ln(x-1))$ — 0,75

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f'(x) = (x-1)(1+2\ln|x-1|)$.

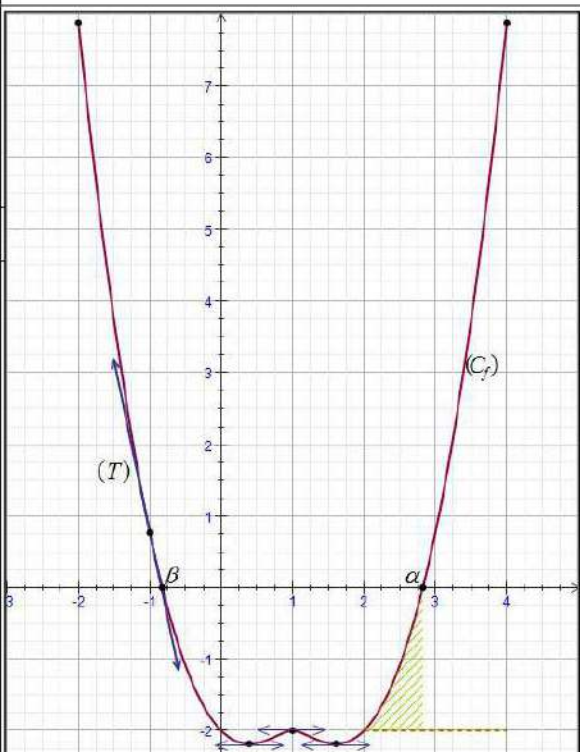
ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها:

$1+2\ln|x-1| = 0$ تكافئ: $|x-1| = e^{-\frac{1}{2}}$ يعني: $x = 1+e^{-\frac{1}{2}}$ أو $x = 1-e^{-\frac{1}{2}}$

$1+2\ln|x-1| > 0$ تكافئ: $|x-1| > e^{-\frac{1}{2}}$ يعني: $x > 1+e^{-\frac{1}{2}}$ أو $x < 1-e^{-\frac{1}{2}}$ — 0,5

x	$-\infty$		$1-e^{-\frac{1}{2}}$		1		$1+e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+2\ln\|x-1\|$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2-0,5e^{-1}$	↗	-2	↘	$-2-0,5e^{-1}$	↗	$+\infty$

0,25

0,25	الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1-e^{-\frac{1}{2}}]$ و $[1;1+e^{-\frac{1}{2}}]$ ؛ متزايدة تماما على $[1-e^{-\frac{1}{2}};1]$ و $[1+e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$.
	3) أ) تبيين أن المستقيم ذا المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ (C_f):
0,5	*) $D_f=\mathbb{R}$ فهي متناظرة بالنسبة لـ 1 ؛ و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: *) $f(1-x)-f(1+x)=(1-x-1)^2\ln\lvert 1-x-1\rvert-(1+x-1)^2\ln\lvert 1+x-1\rvert=x^2\ln\lvert x\rvert-x^2\ln\lvert x\rvert=0$. إذن: المنحني (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x=1$.
	ب) تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين أي أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين:
0,25	*) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $[1+e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$ وبما أن: $f(2,83)\approx 0,02>0$ و $f(2,82)\approx -0,02<0$
	فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على $]1+e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$ حلا وحيدا α حيث: $2,82<\alpha<2,83$.
0,25	*) الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-\infty;1-e^{-\frac{1}{2}}]$ وبما أن: $f(1-e^{-\frac{1}{2}})<0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)>0$
	إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على $]-\infty;1-e^{-\frac{1}{2}}[$ حلا وحيدا β .
0,25	*) من التناظر نستنتج أن $\beta=2(1)-\alpha$ أي: $2-2,83<\beta<2-2,82$ إذن: $-0,83<\beta<-0,82$.
0,5	4) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 $(T):\ y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي: $(T):\ y=-(2+4\ln(2))(x+1)+4\ln(2)-2$ منه: $(T):\ y=-(2+4\ln(2))x-4$
0,75	5) إنشاء المنحني (C_f) و المماس (T) على المجال $[-2;4]$: 
	II. 1) حساب الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto(x-1)^2\ln(x-1)$ على $]1;+\infty[$ و التي تنعدم عند 2 و لتكن H:
0,25	الدالة H معرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $H(x)=\int_2^x (t-1)^2\ln(t-1)dt$
0,25	نضع: $\begin{cases}u(t)=\ln(t-1)\\ v'(t)=(t-1)^2\end{cases}$ حيث: $\begin{cases}u'(t)=\frac{1}{t-1}\\ v(t)=\frac{1}{3}(t-1)^3\end{cases}$ نجد: $H(x)=\left[\frac{1}{3}(t-1)^3\ln(t-1)\right]_2^x-\int_2^x\frac{1}{3}(t-1)^2dt$
0,25	أي: $H(x)=\frac{1}{3}(x-1)^3\ln(x-1)-\frac{1}{9}\left[(t-1)^3\right]_2^x=\frac{1}{3}(x-1)^3\ln(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^3+\frac{1}{9}$.
0,25	2) حساب المساحة $A(\alpha)$: $A(\alpha)=\int_2^\alpha\lvert f(x)-(-2)\rvert dx=[H(x)]_2^\alpha=\frac{1}{3}(\alpha-1)^3\ln(\alpha-1)-\frac{1}{9}(\alpha-1)^3+\frac{1}{9}u.a.....(1)$
0,25	نعلم أن: $f(\alpha)=(\alpha-1)^2\ln(\alpha-1)-2=0$ يعني: $\ln(\alpha-1)=\frac{2}{(\alpha-1)^2}$ بالتعويض في (1) نجد: $A(\alpha)=\frac{1}{3}(\alpha-1)^3\times\frac{2}{(\alpha-1)^2}-\frac{1}{9}(\alpha-1)^3+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}(\alpha-1)-\frac{1}{9}(\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1)+\frac{1}{9}$ إذن: $A(\alpha)=\frac{1}{9}(6\alpha-6-\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha+1+1)=\frac{1}{9}(-\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha-4)u.a$.

انتهى حل الموضوع الثاني